数理解析研究所講究録
903 巻 1995 年 130-137

C^*-環と dual における completely positive decomposition

群馬大学教育　伊藤 隆 (Takashi Itoh)

1　はじめに

１９８７年、Ruan [12] によって operator space ($\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $B(H)$ の subspace) の特徴付けが行われ、Effros により関数解析の量子化が提唱された。ここでいう量子化とは、(X, ϕ) : X normed space, ϕ bounded linear map の category から (X, ϕ) : X operator space, ϕ completely bounded linear map（以下 cb-map）の category への移行である。もちろん、任意の normed space X は dual の単位球 S_{X^*} 上の可換 C^*-環 $C(S_{X^*})$ の subspace であるが、X, Y を normed space、Φ を X から Y への linear map とするとき

$$\Phi : C(S_{X^*}) \supset X \longrightarrow Y \subset C(S_{Y^*})$$

Φ : *bounded* $\Longleftrightarrow$ Φ : *completely bounded* かつ $\|\Phi\| = \|\Phi\|_{cb}$ であるので、cb-map は表面上現れない。

Normed space X の量子化は一意ではない。　$M_{mn}(X)$ 上に norm が定義され以下の２つの条件　$R1), R2)$　を満足すれば、operator space とみなすことが出来る。

Ruan's Theorem　X が $M_{mn}(X)$ 上の norm をもった normed space で
$R1)$ $\|v \oplus w\| = max\{\|v\|, \|w\|\}$　　$(v \in M_{mn}(X), w \in M_{pq}(V))$
$R2)$ $\|\alpha v \beta\| \leq \|\alpha\|\|v\|\|\beta\|$　　$(v \in M_{mn}(X), \alpha \in M_{pm}(C), \beta \in M_{nq}(C))$
を満たすとき、X は operator space に completely isometric である。

可換 C^*-環への埋め込みは、最も弱い量子化であり $M_{mn}(X)$ 上の norm は

$$\|[x_{ij}]\|_{min} = \sup\{\|\phi(x_{ij})\| | \phi : X \to C, \|\phi\| \leq 1\}$$

で与えられている。　一方、

$$\|[x_{ij}]\|_{max} = \sup\{\|\phi(x_{ij})\| | \phi : X \to B(H), \|\phi\| \leq 1\}$$

と定義することにより、最も強い量子化が行える [1]。

１９７９年、Wittstock [14] によって　C^*-環 A から injective な C^*-環 B への selfadjoint な cb-map に対し

$$\phi = \phi_1 - \phi_2, \qquad \|\phi\|_{cb} = \|\phi_1 + \phi_2\|_{cb}$$

となる completely positive map（以下 cp-map）ϕ_1, ϕ_2 が存在することが、示された。この逆として Haagerup [7] は、任意の C^*-環 A から von Neumann 環 N への cb-map が cp-分解可能ならば、N は injective を示した。

Operator space の category での dual (operator dual) を C^*-環の dual に導入することにより、ここでは、C^*-環からその operator dual（C^*-環の operator dual から C^*-環, C^*-環の operator dual から C^*-環 の operator dual）への cb-map の cp-分解を考察することを、目的とする。

2 Matrix ordered operator spaces

従来、C^*-環 A の dual 上の cp-map は、Lance [11] による次の定義を用いてきた。

$$M_n(A^*) \ni [f_{ij}], M_n(A) \ni [x_{ij}] \text{ に対し、} [f_{ij}][x_{ij}] = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x_{ij})$$

即ち

$$M_n(A^*) \overset{def}{=} M_n(A)^* \qquad \text{であった。}$$

しかし、A, B を C^*-環とするとき、A から B^* への cb-map 全体 $CB(A, B^*) = 0$ と成ってしまうので、Positivity に関しては、有効であっても、この設定では cb-map は扱えない。

ここでは、Effros, Ruan, Blecher, Paulsen [1,4] によって与えられた、operator dual を用いる。　V, W を operotor space φ を V から W への linear map とするとき φ が completely bounded とは、

$$\varphi_n : M_n(V) \longrightarrow M_n(W), [x_{ij}] \longmapsto [\varphi(x_{ij})]$$

が、$\sup_n \|\varphi_n\| < \infty$ であるときをいい、cb-norm を $\|\varphi\|_{cb} = \sup_n \|\varphi_n\|$ とおく。V から W への cb-map 全体を $CB(V, W)$ とあらわす。

Definition 2.1　V が operator space であるとき、

$$M_n(V^*) \ni [f_{ij}], V \ni x \text{ に対し、} [f_{ij}](x) = [f_{ij}(x)]\text{、} \qquad \|[f_{ij}]\| = \|[f_{ij}]\|_{cb}$$

と定義する。　即ち　$M_n(V^*) \overset{def}{=} CB(V, C)$ である。この $M_n(V^*)$ の定義された V^* を operator dual と呼ぶ。

Operator dual（以下、単に dual と呼ぶ）は、Ruan の条件　R1), R2) を満たすので operator space になり、さらに V, W が operator space であるとき、

$$CB(V, W^*) = (V \otimes^\wedge W)^*$$

となるので、十分多くの cb-map が存在することになる [1,4]。ここで、$V \otimes^\wedge W$ は、$M_n(V \otimes W)$ に於ける, 次の operator projective tensor norm $\| \ \|_\wedge$ (n=1) での完備化とする。

$$\|x\|_\wedge = \inf \|\alpha\|\|v\|\|w\|\|\beta\|$$

下限は、次の　x のすべての表示に対してとる。

$$x = \alpha(v \otimes w)\beta = \sum \alpha_{s,ik} v_{ij} \otimes w_{kl} \beta_{jl,t}$$

$$\alpha = [\alpha_{s,ik}] \in M_{n,pq}(C), \beta = [\beta_{jl,t}] \in M_{pq,n}(C), v = [v_{ij}] \in M_p(V)\, w = [w_{kl}] \in M_q(W).$$

一方、operator dual の埋め込みの仕方は、positivity を保存しておらず、うつした後の positivity を用いることは出来ない。　また、Lance の定義と compatible な positivity を導入する必要がある。　そこで Lemma を用意する。

Matrix ordered space X とは、cone $M_n(X)^+ \subset M_n(X)_h$ をもった半順序な *-vector space で、さらに復素係数行列 $\gamma = [\gamma_{p,q}]$ に対し

$$\gamma^* M_n(X)^+ \gamma \subset M_m(X)^+$$

を満たすものとし、matrix ordered space X から Y への linear map φ が completely positive であるとは、

$$\varphi_n : M_n(X) \longrightarrow M_n(Y), [x_{ij}] \longmapsto [\varphi(x_{ij})]$$

が 全ての n で positive map であるときをいう。

Lemma 2.2　X を matrix ordered space とする. $[f_{ij}] \in M_n(X^*)$ に対し以下の 5 つは同値である。

(1) $X \longrightarrow M_n(C) : x \longmapsto [f_{ij}(x)]$ は completely positive,

(2) $M_n(X) \longrightarrow M_n(C) : [x_{ij}] \longmapsto [f_{ij}(x_{ij})]$ は positive,

(3) $M_n(X) \longrightarrow M_n(C) : [x_{ij}] \longmapsto [f_{ij}(x_{ij})]$ は completely positive,

(4) $M_n(X) \longrightarrow C : [x_{ij}] \longmapsto \sum f_{ij}(x_{ij})$ は positive,

(5) $M_n(X) \longrightarrow C : [x_{ij}] \longmapsto \sum f_{ij}(x_{ij})$ は completely positive.

ただし、

Remark 2.3

$$X \longrightarrow M_n(C) : x \longmapsto [f_{ij}(x)]$$

において positivity と completely positivity は一致しない。

Lemma 1.1 の (1) と (4) の同値性から matrix ordered operator space の operator dual に、次の cone を定義することにより、Lance の定義と一致する matrix ordered space の構造が入ったことになる。

$$M_n(V^*)^+ = \{\varphi \in CB(V, M_n(C)) \mid \varphi \text{ は } \textit{completely positive}\}.$$

よって V が matrix ordered operator space のとき V^* もまた matrix ordered operator space であり completely isometric な埋め込み

$$V \longrightarrow V^{**}$$

は completely positive order isomorphic [cf. 1,2,4] になる。

$CB(V, W^*)$ と $V \otimes^\wedge W$ の順序の関係をみるために $M_n(V \otimes^\wedge W)$ に cone

$$C_n = \overline{\{\alpha(v \otimes w)\alpha^* \in M_n(V \otimes^\wedge W) \mid v \in M_p(V)^+, w \in M_q(W)^+, \alpha \in M_{n,pq}(C)\}}^{\|\ \|_\wedge}$$

を定義する。$M_n(V \otimes W)$ の元 x, $\|x\|_\wedge < 1$ に対し $x = \alpha(v \otimes w)\beta$ と表示出来る

$$\alpha = [\alpha_{s,ik}] \in M_{n,\infty^2}(C), \beta = [\beta_{jl,t}] \in M_{\infty^2,n}(C), v = [v_{ij}] \in M_\infty(V)$$

$$w = [w_{kl}] \in M_\infty(W) \text{ で } \|\alpha\|\|v\|\|w\|\|\beta\| < 1$$

となるものが存在する。

Proposition 2.4 V と W が matrix ordered operator space ならば $V \otimes^\wedge W$ は matrix ordered operator space である。

$M_n(CB(V, W))$ に対しても cone $CP(V, M_n(W)) \overset{def}{\Leftrightarrow} V$ から $M_n(W)$ への cp-map 全体と $*$-operation $[\varphi_{ij}]^*(x) = [\varphi_{ji}(x^*)^*]$ を定義することにより matrix ordered operator space となる。

Proposition 2.5 V と W が matrix ordered operator space ならば $CB(V, W)$ は matrix ordered operator space である。

flip map $\theta : V \otimes^\wedge W \longrightarrow W \otimes^\wedge V,\ a \otimes b \longmapsto b \otimes a$ は completely isometric isomorphism であるが、さらに

Proposition 2.6 V と W を matrix ordered operator spaces とすると$\theta : V \otimes^\wedge W \longrightarrow W \otimes^\wedge V$ は $*$-preserving completely positive order isomorphim である。

V , W , X を operator space とするとき $CB(V \otimes^\wedge W, X)$ と $CB(V, CB(W, X))$ は completely isometric であるが、次は順序の入った operator space に対しての基本的な関係を与えている。 これにより、順序込みの同型が得られたことになる。

Theorem 2.7 V, W , X を matrix ordered operator space とする。このとき completely isometric isomorphism $CB(V \otimes^\wedge W, X) \cong CB(V, CB(W, X))$ は $*$-preserving completely positive order isomorphism である。

X を C とすることにより次を得る。

Corollary 2.8 V と W が matrix ordered operator space ならば、matrix oredered operator space $CB(V, W^*), CB(W, V^*), (V \otimes^\wedge W)^*$ と $(W \otimes^\wedge V)^*$ は $*$-preserving completely positive order (completely isometric) isomorphic である。

V と W が C^*-環のとき C_n は Banach $*$-環の構造のなかに自然にあらわれる。
$\sum v_i \otimes w_i$, $\sum a_j \otimes b_j \in V \otimes W$, に対し、積と $*$-operation を

$$(\sum v_i \otimes w_i)(\sum a_j \otimes b_j) = \sum v_i a_j \otimes w_i b_j$$

$$(\sum v_i \otimes w_i)^* = \sum v_i^* \otimes w_i^*$$

と定義する。$V \otimes^\wedge W$ に Banach $*$-環の positivity をいれたとき、positive linear functional が cp-map であると、見なすことが出来る。

Theorem 2.9 A と B が C^*-環ならば、$A \otimes^\wedge B$ は Banach $*$-環であり次は同値である。
(1) 任意な $x \in A \otimes^\wedge B$ に対し、$\varphi(x^* x) \geq 0$
(2) 任意な $x \in C_1$ に対し、$\varphi(x) \geq 0$
(3) φ に対応する $CB(A, B^*)$ の元は cp-map である。

以上のことを準備して、C^*-環からその dual への cb-map の cp-分解定理を得る。 証明は、Haagerup norm との比較をもちいる。

Theorem 2.10 A と B を C^*-環とする。A から B^* への completely bounded map がすべて completely positive 分解できるための必要かつ十分条件は、A または B が有限次元であることである。

3 Operator systems and tensor products

この節では、dual から C^*-環への cb-map の分解を考察する。単位元を持った self-adjoint な $B(H)$ の subspace を operator system と呼ぶ。 operotor system は matrix ordered operator space である。A と B をそれぞれ $B(H)$ 、$B(K)$ の operator system とする。

$A \otimes B$ 上の operator injective norm $\| \|_\vee$ は，埋め込み $A \otimes B \subset B(H \otimes K)$ によって誘導されるが，その閉包を $A \otimes^\vee B$ とあらわす。$A \otimes^\vee B$ は，A と B の作用する Hilbert space の取り方によらないことが知られている [1]。

$A \otimes^\vee B$ の positive cone も上の埋め込みから誘導されるものとして定義する。 即ち

$$(A \otimes^\vee B)^+ = A \otimes^\vee B \cap B(H \otimes K)^+.$$

次により $A \otimes^\vee B$ の positive cone も Hilbert spaces の取り方に依らないことがわかる。

Lemma 3.1 A と B を operator system とする。このとき，次は同値である。
(1) $x \in (A \otimes^\vee B)^+$
(2) 任意な Hilbert spaces H,K, $\varphi \in CP(A, B(H))$ $\psi \in CP(B, B(K))$ に対し，$(\varphi \otimes \psi)(x) \in B(H \otimes K)^+$
(3) 任意な $[f_{ij}] \in M_n(A^*)^+$ と $[g_{kl}] \in M_m(B^*)^+$ に対し, $[f_{ij} \otimes g_{kl}(x)] \in M_{nm}(C)^+$

A と B を operator space とするとき, $A \otimes^\vee B$ から $CB(A^*, B)$ への completely isometric isomorhism が存在する。さらに,

Proposition 3.2 A と B が operator system ならば，completely isometric $\varphi : A \otimes^\vee B \hookrightarrow CB(A^*, B)$ は completely positive order isomorphism である。

R と S がそれぞれ $B(H)$, $B(K)$ の $\sigma - weak$ closed operator system であるとき $R \otimes S$ の $\sigma - weak$ closure を $R \overline{\otimes} S$ とし、$B(H \otimes K)$ から入る positivity を考える。

Lemma 3.3 R と S を $\sigma-week$ operator system とする。このとき，次は同値である。
(1) $x \in (R\overline{\otimes}S)^+$
(2) 任意な Hilbert spaces H,K, normal な $\varphi \in CP(R, B(H))$ $\psi \in CP(S, B(K))$ に対し，$(\varphi \otimes \psi)(x) \in B(H \otimes K)^+$
(3) 任意な $[f_{ij}] \in M_n(R_*)^+$ と $[g_{kl}] \in M_m(S_*)^+$ に対し，$[f_{ij} \otimes g_{kl}(x)] \in M_{nm}(C)^+$

Effros と Ruan により，R と S が $\sigma-weak$ closed operator system で $R_* \otimes^\wedge S_* \longrightarrow R_* \otimes^\vee S_*$ が単射ならば、$R\overline{\otimes}S$ は $(R_*\otimes^\wedge S_*)^*$ と completely isometric $\sigma-weak$ homeomorphic であることが示された [6]。R と S が $\sigma-weak$ closed operator system のとき、さらに

Theorem 3.4 R と S が、$\sigma-weak$ closed operator system で $R_* \otimes^\wedge S_* \longrightarrow R_* \otimes^\vee S_*$ が単射ならば、completely isometric $\sigma-weak$ homeomorphism $\Lambda : R\overline{\otimes}S \longrightarrow (R_* \otimes^\wedge S_*)^*$ は$*$-preserving completely positive order isomorhic である。

この対応を使うことにより、dual から環への cb-map の cp-分解定理を得る。

Theorem 3.5 R と S が $\sigma-weak$ closed operator system で $R_* \otimes^\wedge S_* \longrightarrow R_* \otimes^\vee S_*$ が単射ならば、$\phi \in CB(R_*, S)$ が self-adjoint のとき、$\phi = \phi_1 - \phi_2$, $\|\phi\|_{cb} = \|\phi_1 + \phi_2\|_{cb}$ となる completely positive map $\phi_1, \phi_2 \in CB(R_*, S)$ が存在する。

A が C^*-環のとき、$A^{**}\overline{\otimes}S = (A^* \otimes^\wedge S_*)^*$ であるので

Cororally 3.6 A を C^*-環、S を von Neumann 環とすると、$\varphi \in CB(A^*, S)$ が self-adjoint ならば、$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\|\varphi\|_{cb} = max\{\|\varphi_1\|_{cb}, \|\varphi_2\|_{cb}\}$ となる completely positive map $\varphi_1, \varphi_2 \in CB(A^*, S)$ が存在する。

よって C^*-環と von Neumann 環に、この場合何も仮定することなく cp-分解ができることがわかった。以上で環から dual、dual から環への cb-map の分解を得たことになるが、最後に Wittstock, Haagerup の結果と上記のことを総合すると、dual から dual への cb-map の分解定理を得る。

Theorem 3.7 任意な C^*-環 B に対し，全ての$\varphi \in CB(A^*, B^*)$ が cp-decomposable であるための必要かつ十分条件は、A が nuclear なことである。

参考文献

[1] D.P. Blecher and V.I. Paulsen, *Tensor products of operator spaces,* J.Funct.Anal. 99 (1991), 262–292.

[2] M.D. Choi and E.G. Effros, *Injectivity and matrix ordered space,* J. Funct. Anal. 24 (1977), 156–209.

[3] E. Christensen, E. G. Effros and A. M. Sinclair, *Completely bounded maps and C^*-algebraic cohomology,* Inventiones Math. 90 (1987), 279–296.

[4] E.G. Effros and Z.-J. Ruan, *A new approach to operator spaces,* Bull.Can.Math.Soc. 34 (1991), 329–337.

[5] E.G. Effros and Z.-J. Ruan, *On approximation properties for operator spaces,* Int.J.Math. 1 (1991), 163–187.

[6] E.G. Effros and Z.-J. Ruan, *Operator convolution algebras: an approach to quantum groups,* to appear

[7] U. Haagerup, *Injectivity and decomposition of completely bounded maps,* Lecture Notes in Math. 1132 (1983), 170–222.

[8] T. Huruya, *Decompositions of linear maps into non separable C^*-algebras,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 21 (1985), 645–655.

[9] T. Itoh, *The maximal C^*-norm and the Haagerup norm,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 107 (1990), 109–114.

[10] T. Itoh, *A decomposition theorem in a Banach $*$-algebra related to completely bounded maps on C^*-algebras,* J. Math. Soc. Japan 43 (1991), 619–630.

[11] E.C. Lance, *On nuclear C^*-algebras,* J. Funct. Anal. 12 (1973), 157–176.

[12] Z.-J. Ruan *Subspaces of C^*-algebras,* J. Funct. Anal. 76 (1988), 217–230.

[13] C.-Y. Suen, *A $n \times n$ matrix of linear maps of a C^*-algebra,* Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), 709–712.

[14] G. Wittstock, *Ein operatorwertiger Hahn-Banach Satz,* J. Funct. Anal. 40 (1981), 127–150.